

## МОДЕЛЮВАННЯ ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ СКЛАДНИХ СИСТЕМ

О. І. Олемскої<sup>1,2</sup>, В. М. Борисюк<sup>2</sup>, І. О.Шуда<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Інститут прикладної фізики НАН України, 40030, Суми, Україна

<sup>2</sup>Сумський державний університет, 40007, Суми, Україна

(Отримано 10 грудня 2008 р.; в остаточному вигляді — 23 липня 2009 р.)

На основі бінарного мультифрактала Кантора, що допускає аналітичний опис, протестовано методи покриттів і множників, перший із яких припускає використання заморожених середніх, другий — відпалених. Розроблено алгоритм чисельного моделювання мультифрактального фазового простору, який враховує як відсутність самоусереднення складних систем, так і наявність від'ємних значень їхньої спектральної функції. Як фізичний приклад розглянуто мультифрактальну множину, народжену аномальною дифузією.

**Ключові слова:** складна система, фазовий простір, мультифрактальний спектр.

PACS number(s): 05.20.Gg, 05.45.Df, 05.70.Ce

### ВСТУП

Одним з основних об'єктів сучасних досліджень є *складні системи*, фазовий простір яких розділений на області, що слабо перекриваються (або ізольовані), завдяки чому поведінка таких систем може цілком змінюватись від навіть дуже слабкого впливу [1–3]. До складних систем належать феромагнетики, спінове скло, двомірна електронна плазма в турбулентному режимі, системи з аномальною дифузією Леві, гранульовані системи, тверді тіла, які піддаються йонному бомбардуванню, гравітаційні системи, сонячні нейтрино, чорні дірки, елементарні частинки, які зіштовхуються з високою енергією, квантові системи, що проявляють ефекти заплутування, і багато інших (див. [4, 5] та наведені там посилання). У процесі еволюції цих систем експоненціально швидко переміщення фазового простору набуває степеневого характеру, унаслідок чого він хаотизується тільки слабким чином. Крім того, таким системам притаманні ефекти далекодії, немарківська поведінка, мультифрактальні граничні або патологічні початкові умови, деякі спеціальні механізми дисипації та інші.

Найпримітнішою властивістю складних систем є *фрактальний* характер фазового простору, самоподібність якого означає збереження форми фрактала на різних масштабах його розгляду. Формально ця властивість виражається в тому, що міра  $Z$ , визначена на фракталі<sup>1</sup>, задається однорідною функцією, яка підпорядковується співвідношенню [6]

$$Z(x/l) := l^D Z(x), \quad (1)$$

де  $l$  — масштаб змінної  $x$ ,  $D$  — фрактальна вимірність. Якщо величина  $Z$  зводиться до мінімального числа  $N$   $d$ -мірних кубиків з ребром  $l$ , які покривають фрактал, а змінна  $x$  задає ступінь розтягнення/стискання, що

відновлює його початковий розмір у масштабі  $l$ , то  $x = l$  і рівняння (1) дає скейлінгове співвідношення

$$N(l) = l^{-D}, \quad (2)$$

де прийнято, що об'єкт одиничної довжини покривається одним кубиком ( $N(1) = 1$ ). Звідси означення фрактальної вимірності Гаусдорфа:

$$D = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln N(l)}{\ln(1/l)}. \quad (3)$$

Оскільки для множини, що має топологічну вимірність  $D_0$ , кубики не завжди потрапляють на фрактал, то його вимірність  $D \leq D_0$ .

Співвідношення (1)–(3) має на увазі найпростішу (моно) фрактальну множину, яка характеризується єдиним значенням  $D$ . У загальному випадку самоподібний об'єкт задається набором монофракталів, короткий опис якого викладено в розділі II. Основна ціль запропонованої роботи полягає в розробці алгоритму чисельного моделювання мультифрактального фазового простору складних систем, особливості будови якого досліджені аналітично [7]. Проблеми такого моделювання зумовлені двома обставинами: поперше, складні системи не є самоусередними статистичними об'єктами, оскільки їхні макроскопічні характеристики змінюються випадково від зразка до зразка [8]; по-друге, мультифрактальний спектр такого простору приймає від'ємні значення, наявність яких приводить до відмови стандартної процедури описання фракталів, основаної на методі покриттів [6]. Тому в розділі III ми подаємо короткий опис бінарного мультифрактала Кантора, можливість аналітичного опису якого дає змогу тестувати метод множників [9], який лежить в основі нашого розгляду. Як показують розділи IV, V, бінарний каскад дозволяє

<sup>1</sup>Для геометричних фракталів приклад міри дає довжина порізаної берегової лінії, для випадкових — статистична вага.

генерувати випадковий мультифрактал, що імітує фазовий простір складної системи, якщо б кожною біфуркацією зівставляти не пару ймовірностей, а більшу їх кількість. Як фізичний приклад в розділі V ми розглянули мультифрактальну множину, що породжується аномальною дифузиею. Розділ VI завершує наш розгляд обговоренням, результатом якого є чисельний алгоритм аналізу випадкових мультифракталів.

## І. ОСНОВИ ТЕОРІЇ МУЛЬТИФРАКТАЛІВ

Згідно з [10] самоподібний об'єкт задається набором монофракталів, кожний із яких характеризується показником Гьольдера  $\alpha$ , що визначає ймовірність

$$P_i := l_i^\alpha \quad (4)$$

попадання в комірку  $i$  довжини  $l_i \rightarrow 0$  (набір  $i = 1, 2, \dots, N$  таких комірок отримуємо діленням вихідного відрізка на  $N \rightarrow \infty$  частинок). Мультифрактальну множину задаємо мірою

$$Z(q) := \sum_{i=1}^N P_i^q, \quad (5)$$

значення якої  $Z(1) = 1$  при відсутності деформації визначається умовою нормування  $\sum_{i=1}^N P_i = 1$ . Деформація  $q \neq 1$  дає змогу виділити максимальний внесок великих ймовірностей  $P_i$  при додатних  $q$  та малих  $P_i$  при від'ємних. Заданому значенню показника  $\alpha$  відповідають

$$\mathcal{N}(\alpha) := l_i^{-f(\alpha)} \quad (6)$$

комірок, кількість яких визначається спектром мультифрактала  $f(\alpha)$ . У результаті міра (5) набуває вигляду

$$Z(q) = \sum_{i=1}^N l_i^{q\alpha - f(\alpha)}. \quad (7)$$

Далі слід перейти від підсумовування за комірками до інтегрування за спектром мультифрактала, де при  $l_i \rightarrow 0$  основний внесок дають значення  $\alpha$ , що відповідають мінімальній величині показника  $\tau = q\alpha - f(\alpha)$ . Тому при фіксованому параметрі  $q$  у точці мінімуму  $\alpha = \alpha(q)$  приходимо до умов

$$\left. \frac{df}{d\alpha} \right|_{\alpha=\alpha(q)} = q, \quad \left. \frac{d^2f}{d\alpha^2} \right|_{\alpha=\alpha(q)} < 0, \quad (8)$$

які визначають скейлінговий показник  $\alpha(q)$  за заданим спектром  $f(\alpha)$ . При цьому міра (7) приймає степеневу форму

$$Z(q) \simeq l^{\tau(q)}, \quad (9)$$

де  $l \equiv \max\{l_i\}$  — максимальна довжина комірок  $i \in [1, N]$ , а масовий показник, визначений перетворенням Лежандра

$$\tau(q) := q\alpha(q) - f(\alpha(q)) \quad (10)$$

задає показник Гьольдера

$$\alpha(q) = \frac{d\tau}{dq} \quad (11)$$

при фіксованому значенні параметра деформації.

Як показує приклад спінового скла [11], характерна особливість складних систем полягає в тому, що повний набір їхніх станів задається не одним статистичним ансамблем, а ієрархічно суцільним набором ансамблів, стани яких розділені макроскопічними бар'єрами термодинамічного потенціалу. Завдяки цьому поведінка системи істотно залежить від початкових умов, розкид яких може приводити до критичних змін статистичних станів системи при переході від однієї її реалізації (зразка) до іншої. У зв'язку з цим прийнято говорити, що складні системи мають *заморожений безлад*, за яким слід провести усереднення, що враховує розкид за різними реалізаціями складної системи. Із співвідношення (9) видно, що, за аналогією зі спіновим склом, опис мультифрактальних властивостей складних систем передбачає два типи усереднення:

- *заморожене* значення

$$\langle \tau(q) \rangle := \frac{\ln Z(q)}{\ln l} \quad (12)$$

отримуємо усередненням логарифма статистичної суми за відповідним ансамблем;

- при визначенні *віддаленого* значення

$$\overline{\tau(q)} := \frac{\ln \overline{Z(q)}}{\ln l} \quad (13)$$

передбачається усереднення самої статсуми (9) за різними реалізаціями, що зумовлено розкидом початкових умов.

Як і в статистичній фізиці спінового скла [11], макроскопічний опис мультифрактального фазового простору досягається комбінованим використанням обох середніх. Однак якщо у термостатиці вільна енергія виражається через віддалене середнє  $\overline{[Z(q)]^n}$  в межах методу реплік ( $n \rightarrow 0$ ), то в теорії випадкових мультифрактальних множин цього досягаємо за рахунок використання *методу множників* [9], що викладений у розділі IV. Маючи на увазі необхідність протестувати цей метод в застосуванні до складних систем, наведемо спочатку основні відомості про бінарний мультифрактал Кантора, який допускає аналітичне дослідження.

**II. БІНАРНИЙ МУЛЬТИФРАКТАЛ КАНТОРА**

Найпростіше генерацію мультифрактальної множини досягаємо за допомогою бінарного каскаду Кантора, при якому відрізок одиничної довжини ділимо на дві рівні частини, з яких одній приписуємо ймовірність  $p_1 < 1$ , другій —  $p_2 = 1 - p_1$ . Далі процедуру повторюємо  $n \rightarrow \infty$  разів, приводячи після кожного кроку до розподілу ймовірностей  $P_n^i$  за різними конфігураціями  $i = 1, 2, \dots, 2^n$ . Так, після другого кроку отримуємо розподіл  $P_2^i: p_1p_1; p_1p_2; p_2p_1; p_2p_2$ , де коми розділяють значення, що відповідають різним відрізнякам, а крапки з комою — різні конфігурації. Відповідно, після третього кроку маємо  $P_3^i: p_1p_1p_1; p_1p_1p_2; p_1p_2p_1; p_2p_1p_1; p_1p_2p_2; p_2p_1p_2; p_2p_2p_1; p_2p_2p_2$ . Як видно з цих прикладів, при заданому  $n$  різні конфігурації відрізняються кількістю разів  $m$ , з яким зустрічається ймовірність  $p_1$  в добутку  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$ . Очевидно, кількість таких добутків дорівнює числу сполучень  $C_n^m = n! / (m!(n - m)!)$ . У результаті знаходимо міру мультифрактала Кантора

$$Z_n(q) := \sum_{i=0}^{2^n} (P_n^i)^q = \sum_{m=0}^n C_n^m (p_1^m p_2^{n-m})^q. \quad (14)$$

Приймаючи, що відрізок довжини  $l \rightarrow 0$  покриває тільки одну групу  $n$ -цифрових чисел, що містять  $m$  значень  $p_1$ , отримуємо міру, яка їй відповідає  $Z_n^m(q) = C_n^m l_n^q$ ,  $l_n = (1/2)^n$ , для неї використання формули Стірлінга дає скінченне значення за умови  $q = f(s)$ , де функція  $f(s) \equiv -[s \ln s + (1 - s) \ln(1 - s)] / \ln 2$  залежить від аргументу  $s = m/n$ , що визначає долю значень  $p_1$  у групі  $m$ . З іншого боку, кількість монофракталів, які містяться в мультифракталі Кантора, виражається рівностями  $N_n^s := l_n^{-f(s)} = C_n^{sn}$ , із яких випливає, що  $f(s)$  задає спектральну функцію мультифрактала Кантора. Однак параметр  $s$  не є спостережуваною величиною, і від нього слід перейти до показника Гольдера  $\alpha$ , порівнюючи означення  $P_n^s := l_n^\alpha$ ,  $l_n = (1/2)^n$  з раніше знайденим рівнянням  $P_n^s = (p_1^s p_2^{1-s})^n$ . У результаті приходимо до лінійної залежності  $\alpha = -[s \ln p_1 + (1 - s) \ln p_2] / \ln 2$ , яка має той же вигляд  $f(\alpha)$ , що й  $f(s)$ . При цьому ненульові значення  $f$  скупчені в інтервалі від  $\alpha_{\min} = -\ln p_2 / \ln 2$  до  $\alpha_{\max} = -\ln p_1 / \ln 2$ , де  $p_1 \leq 1/2$ . Нижня границя відповідає  $s = 0$ , де біноміальна послідовність складається тільки з чисел  $p_2$ , а верхня — протилежному випадку  $s = 1$ , при якому послідовність зводиться до набору чисел  $p_1$ . У граничних точках маємо  $df/d\alpha = \pm\infty$ , а максимального значення  $f = 1$ , що відповідає  $df/d\alpha = 0$ , досягаємо при  $\alpha_0 = -(\ln p_1 + \ln p_2) / 2 \ln 2$ .

Наведена процедура побудови мультифрактала Кантора має ту перевагу, що не потребує виходу за межі аналітичних методів. Тому її зручно використовувати, тестуючи чисельні алгоритми генерації й описуючи мультифрактальні множини. Як перший приклад побудови такої множини розгляньмо бінарний каскад, де на кожному кроці побудови  $n \in [1, 10]$  з одним відрізком зіставляємо ймовірність  $p_1 = 0.3$ , а з другим —  $p_2 = 0.7$ . Відтак вибираємо  $N = 2 \cdot 10^6$

точок, які розсипаються по  $2^n$  сегментах так, що в кожний потрапляє кількість  $N_n^m = N p_1^m p_2^{n-m}$  таких точок, пропорційна відповідній ймовірності  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$ . Далі вибираємо сегмент фіксованої довжини  $l \in [10^{-3}, 10^{-2}]$ , покриваємо ним вихідний відрізок одиничної довжини й підраховуємо кількість точок  $N_j^l$ , що потрапили в кожну комірку  $j = 1, 2, \dots, 1/l$ . Отримані в результаті ймовірності  $P_j^l = N_j^l / N$  деформуємо піднесенням до степеня  $q$  й підраховуємо міру  $Z_l(q) := \sum_{j=1}^{1/l} (P_j^l)^q$ , визначену згідно з (14). Для самоподібної множини ця міра має степеневий вигляд (9), звідки легко знайти значення масового показника  $\tau(q)$ , що зводиться при  $q = 1$  до фрактальної вимірності (3). Зі зміною параметра деформації  $q$  використання рівностей (10) і (11) приводить до спектра мультифрактала  $f(\alpha)$ , показаного на рис. 1. Істотна особливість наведеної побудови полягає в тому, що після  $n$  ітерацій кількість  $2^n$  відрізків, отриманих діленням вихідного, збігається з кількістю різних комбінацій співмножників у ймовірностях  $P_n^m = p_1^m p_2^{n-m}$  при різних  $m \in [0, n]$ . Завдяки цьому можливі значення показника Гольдера  $\alpha$  визначаємо єдиною реалізацією біноміального процесу Кантора, що приводить до спектра мультифрактала  $f(\alpha)$ , показаного на рис. 1. Із нього виходить, що для детермінованого мультифрактала метод покриттів добре узгоджується з аналітичними даними при додатних параметрах деформації  $q$ , тоді як для від'ємних  $q$  точність суттєво зменшується. Що стосується затрат машинного часу, який забезпечує представлений алгоритм чисельного моделювання, і визначення спектра мультифрактала, то вони цілком прийнятні.

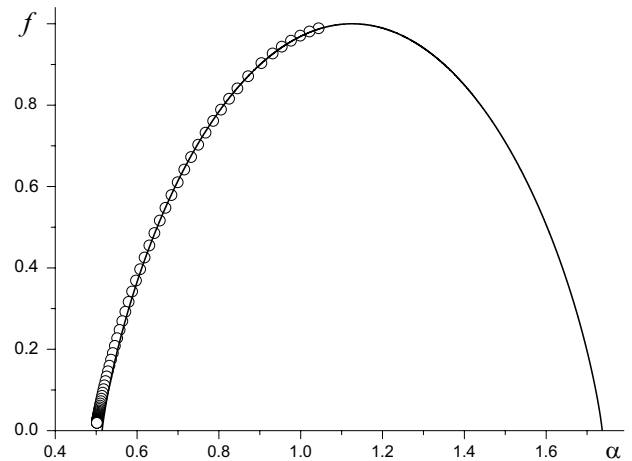


Рис. 1. Спектр мультифрактала Кантора, генеровано го бінарним каскадом із  $n = 10$  рівнями з ймовірностями  $p_1 = 0.3$  і  $p_2 = 0.7$  (суцільна лінія отримана аналітично, порожні кружальця — методом покриттів при  $q = 0.1, 0.2, \dots, 10$ ).

**III. МЕТОД МНОЖНИКІВ**

Як зазначено у Вступі, фазовий простір складної системи має випадковий характер, завдяки чому кож-

на його реалізація приводить до мультифрактального спектра, що змінює свою форму, переходячи від одного зразка до другого. Покажемо, що бінарний каскад генерації мультифрактала, описаний у попередньому розділі, забезпечує вказаний розкид спектра, якщо після кожної біфуркації з парою комірок зіставляти не дві можливості  $[p_1, p_2]$  і  $[p_2, p_1]$  у розподілі ймовірностей  $p_1$  і  $p_2 = 1 - p_1$ , а більшу їх кількість. Виявляється, що набір цих ймовірностей задає множники, комбінації яких при повторенні утворюють мультифрактальну множину [9].

Нехай з парою комірок, що генеруються на кожному кроці побудови, зіставляємо один із чотирьох варіантів  $[p_1, p_2]$ ,  $[p_2, p_1]$ ,  $[p_3, p_4]$  і  $[p_4, p_3]$  сполучення ймовірностей  $p_1 < p_3 < 1/2$ ,  $p_2 = 1 - p_1$  і  $p_4 = 1 - p_3$ . Тоді на кроці  $n$  кожна комбінація множників  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  виникає з ймовірністю  $(1/4)^n$ , а кількість різних комірок становить, як і раніше,  $2^n$ . У результаті перебір усіх комбінацій у розподілі множників на  $n$ -ому кроці генерації досягаємо не в одному зразку, а в їх наборі, що складається з  $(2^n 4^{-n})^{-1} = 2^n$  штук. Це означає, що при такій побудові визначення достовірного спектра  $f(\alpha)$  потребує усереднення за зразками, набір яких забезпечує всі можливі комбінації в розподілі співмножників  $p_j$  за різними комірками.

Наведений приклад показує, що при описі випадкового мультифрактала відпалене значення (13) можна визначити усередненням за набором зразків:

$$\overline{\tau(q)} = \frac{\ln \overline{Z_n(q)}}{\ln(1/2)} := \frac{1}{\ln(1/2)} \ln \left[ \frac{1}{K} \sum_{a=1}^K \sum_{i=1}^{2^n} (P_i^a)^q \right]. \quad (15)$$

Тут  $K$  — кількість таких зразків,  $P_i^a$  — міра  $i$ -ї комірки в  $a$ -ому зразку на рівні  $n \gg 1$ . Оскільки підвищення точності досягаємо за рахунок збільшення кількості кроків ітерації  $n$ , що приводить до експоненціального зростання ансамблю зразків (у наведеному прикладі їх кількість дорівнювала  $2^n$ ), то процедура усереднення за різними зразками потребує більших обчислювальних затрат, які експоненціально зростають із підвищенням точності. Цю проблему дає змогу обійти *метод множників*.

У межах цього методу процедура усереднення зводиться до таких дій:

- на кроці  $n - 1$  накриваємо одиничний відрізок комірками  $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$  розміру  $2^{-(n-1)}$  і підраховуємо кількість точок  $N_i$ , що потрапили в кожну з них;
- переходимо на наступний рівень  $n$ , для чого комірки  $i = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$  ділимо навпіл і підраховуємо кількість точок  $N_i^{(1,2)}$  у кожній з половинок;
- із означення

$$M_i^{(1,2)} := \frac{N_i^{(1,2)}}{N_i} \quad (16)$$

знаходимо набір  $\{M_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, 2^n$  множників, що відповідають рівню  $n$  (можна прийняти

$j = 2i$  для парних і  $j = 2i + 1$  для непарних індексів);

- замість середнього за зразками (15), вводимо середнє за розподілом множників

$$\overline{\tau(q)} = \frac{\ln \overline{Z(q)}}{\ln(1/2)}, \quad \overline{Z(q)} := \frac{1}{2^{(n-1)}} \sum_{j=1}^{2^n} M_j^q. \quad (17)$$

Спектр мультифрактала має єдину форму  $f(\alpha)$  на всіх рівнях  $n$  при самоподібному розподілі множників, який забезпечується повторюваними сполученнями, в їх розподілі [9]. Так, у прикладі, наведеному на початку розділу, всі множники зводяться до набору елементарних ймовірностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , певне чергування яких на кожному кроці ітерації  $n$  (наприклад, послідовність Фібоначчі) приводить до генерації монофрактала. Деформація множників за рахунок піднесення до степеня  $q$  трансформує монофрактал у мультифрактальну множину.

Завдяки самоподібності для кожного показника  $\alpha$  можна знайти множник  $M^*$ , який після багатократної ітерації відповідає тому ж показникові Гольдера:  $M^* \sim 2^{-\langle \alpha(M^*) \rangle}$ . При цьому ймовірність реалізації множника  $M^*$ , що відповідає фіксованому показникові  $\alpha$ , має вигляд

$$P(M^*) := \ln \mathcal{N}(M^*) = \epsilon^{-D_0 + \langle \alpha(M^*) \rangle}, \quad (18)$$

де  $D_0 = 1$  — вимірність відрізка, на якому проводимо побудову. Використання цієї ймовірності в першій із формул (17) дає середнє значення масового показника

$$\overline{\tau(q)} = -D_0 - \frac{\ln \overline{M^q}}{\ln 2}, \quad (19)$$

звідки виходить

$$\overline{\alpha(q)} = \frac{\partial \overline{\tau}}{\partial q} = -\frac{\ln(\overline{M}) \overline{M^q}}{\ln(2) \overline{M^q}}. \quad (20)$$

У результаті спектральну функцію визначаємо виразом

$$f(\alpha(q)) = q \overline{\alpha(q)} - \overline{\tau(q)}. \quad (21)$$

На рис. 2 показаний спектр мультифрактала, генерованого бінарним каскадом при випадковому виборі ймовірностей  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  і  $p_4 = 0.7$ . Із рисунка видно, що результати прямого обчислення за формулою (17), де набір множників  $M_j$  утворюється  $2^8$ -кратним повторенням набору вказаних ймовірностей, задовільно узгоджується з чисельними даними, знайденими методом множників. Це дає змогу зробити висновок, що такий метод є надійною основою чисельного означення мультифрактального спектра самоподібних множин, генерованих випадково.

При розгляді рис. 2 привертає увагу той факт, що, на відміну від методу покриттів, використання множників приводить до від'ємних значень спектральної

функції  $f(\alpha)$ , які відповідають великим абсолютним значенням  $|q|$  параметра деформації. Це пов'язано з тим, що використання методу покриттів передбачає визначення заморожених середніх типу (12), для яких кожному значенню  $\alpha$  відповідає не менш ніж одна реалізація (зразка), завдяки чому середнє значення спектральної функції  $\langle f(\alpha) \rangle = \langle \ln \mathcal{N}(\alpha) \rangle / \ln(2)$  не може набувати від'ємних значень. У межах методу множників, оснований на використанні відпалених середніх вигляду (13), проводимо усереднення самого числа фракталів, що відповідають цьому показникові  $\alpha$ . Оскільки  $\overline{\mathcal{N}(\alpha)}$  може бути меншим від одиниці, то відповідне значення спектральної функції  $f(\alpha) = \ln \overline{\mathcal{N}(\alpha)} / \ln(2)$  може стати від'ємним. Звідси видно, що для випадкового мультифрактала від'ємні значення спектральної функції  $f(\alpha)$  відповідають найрідшим реалізаціям міри.

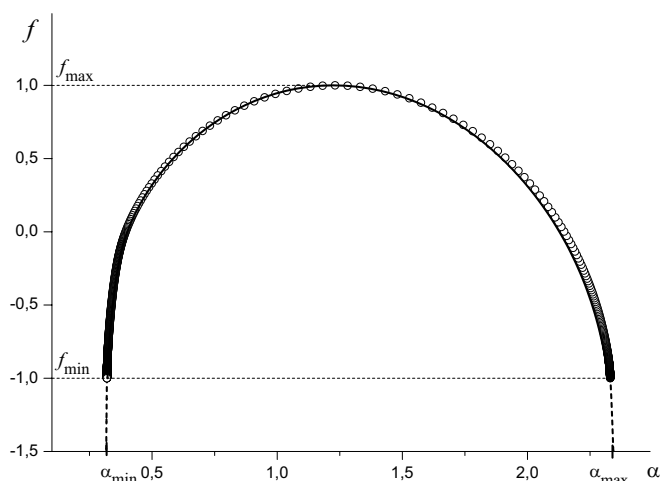


Рис. 2. Спектр випадкового мультифрактала, генерованого бінарним каскадом, що складається з  $n = 10$  рівнів із ймовірностями  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  і  $p_4 = 0.7$  (неперервна лінія отримана з (17), якщо набір множників  $M_j$  утворюється  $2^8$ -кратним повторенням набору вказаних ймовірностей; порожні кружальця відповідають результатам методу множників із використанням співвідношень (19)–(21) при різних  $q$ ).

У прикладі випадкового каскаду, наведеному на початку розділу, з кожною коміркою зіставляли одну з чотирьох ймовірностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , завдяки чому на кроці  $n$  конфігурації  $p_j^n$  реалізувалися з частотою  $\overline{\mathcal{N}_n} = 2^{-n}$ , рівною оберненому числу зразків, набір яких забезпечує всі можливі конфігурації. У результаті граничні значення  $\alpha_{\min} = -\ln p_2 / \ln 2$  і  $\alpha_{\max} = -\ln p_1 / \ln 2$ , при яких реалізуються єдині комбінації множників  $p_2^n$  і  $p_1^n$ , що дають максимальну й мінімальну ймовірності, відповідають від'ємному значенню спектральної функції  $f = \ln \overline{\mathcal{N}_n} / \ln(1/l_n) = \ln 2^{-n} / \ln 2^n = -1$  (див. рис. 2). Узагалі, коли кожна з  $2^n$  комірок зіставляють з  $m > 2$  ймовірностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , частота появи кожної конфігурації  $p_j^n$  становить  $\overline{\mathcal{N}_n} = 2^n (1/m)^n = (2/m)^n$ , і граничні комбінації множників  $p_{\max}^n$  і  $p_{\min}^n$  реалізуються при значенні

спектральної функції

$$f_{\min} := \frac{\ln \overline{\mathcal{N}_n}}{\ln(1/l_n)} = \frac{\ln(2/m)^n}{\ln(2^n)} = -\left(\frac{\ln m}{\ln 2} - 1\right). \quad (22)$$

Що стосується максимального значення  $f_{\max} = 1$ , то рендомізація генеруючого каскаду не впливає на нього, оскільки це значення повинно збігатися з вимірністю  $D_0 = 1$  вихідного відрізка, на якому проводиться побудова мультифрактала [6].

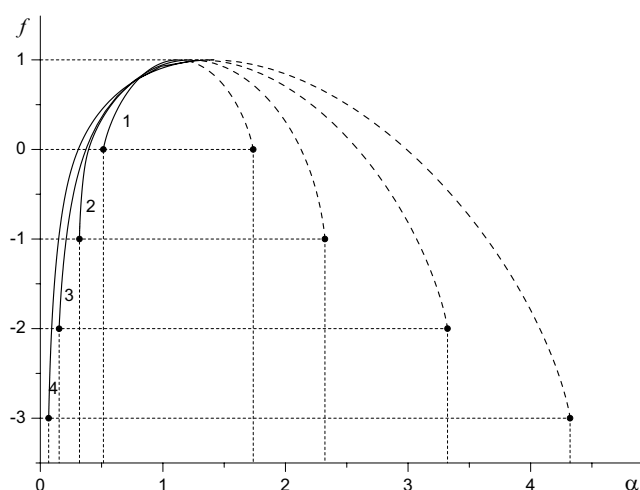


Рис. 3. Зміни мультифрактального спектра зі збільшенням набору, що складається із  $2^{m+1}$  ймовірностей, які зіставляються з кожною біфуркацією (криві 1–4 відповідають  $m = 0, 1, 2, 3$ ; крива 1:  $p_1 = 0.3$  і  $p_2 = 0.7$ ; крива 2:  $p_1 = 0.2$ ,  $p_2 = 0.8$ ,  $p_3 = 0.3$  і  $p_4 = 0.7$ ; крива 3:  $p_1 = 0.1$ ,  $p_2 = 0.9$ ,  $p_3 = 0.2$ ,  $p_4 = 0.8$ ,  $p_5 = 0.3$ ,  $p_6 = 0.7$ ,  $p_7 = 0.4$  і  $p_8 = 0.6$ ; крива 4:  $p_1 = 0.05$ ,  $p_2 = 0.95$ ,  $p_3 = 0.10$ ,  $p_4 = 0.90$ ,  $p_5 = 0.15$ ,  $p_6 = 0.85$ ,  $p_7 = 0.20$ ,  $p_8 = 0.80$ ,  $p_9 = 0.25$ ,  $p_{10} = 0.75$ ,  $p_{11} = 0.30$ ,  $p_{12} = 0.70$ ,  $p_{13} = 0.35$ ,  $p_{14} = 0.65$ ,  $p_{15} = 0.40$  і  $p_{16} = 0.60$ ). Неперервні лінії відповідають додатним значенням  $q$ , штриховані — від'ємним.

Для підтвердження наведених даних на рис. 3 побудовані спектри мультифракталів, для яких можливі множники  $M_j$  зводяться до наборів елементарних ймовірностей  $p_j$ , кожна з яких містить  $2^{m+1}$ ,  $m = 0, 1, 2, 3$  значень. Із відповідних кривих видно, що розширення набору множників приводить до розширення області значень як самої спектральної функції  $f$ , так і показника Гольдера  $\alpha$ . Оскільки перша величина обмежена згори геометричним значенням  $f_{\max} = 1$ , то це розширення забезпечується спаданням мінімальних значень показника Гольдера  $\alpha_{\min} = -\ln p_{\max} / \ln 2$  і спектральної функції (22), а також зростанням максимального значення  $\alpha_{\max} = -\ln p_{\min} / \ln 2$ .

При чисельній реалізації методу множників слід мати на увазі, що зменшення мінімального значення  $p_{\min} \rightarrow 0$  із набору ймовірностей  $p_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$  може приводити до зникаюче малого значення  $\overline{\mathcal{N}_{\min}} = 2^{-n} N p_{\min} \ll 1$  мінімального числа заповнення, що означає появу пустих комірок, наявність яких викривляє форму мультифрактального спектра. У цьому випадку для досягнення надійних даних слід оптимізувати метод множників, при яких на кожному кроці

генерації  $n$  вибираємо настільки велику кількість  $N$  покриваючих точок, щоб вони попадали в кожную з  $2^n$  комірок.

Другий бік цієї проблеми пов'язаний із появою пустих комірок при необмеженому спаданні деформованих множників  $M_j^q$  завдяки зростанню параметра  $q > 1$  в рівнянні (17). У результаті використання методу множників із зростаючими значеннями  $q$  може привести до значень спектральної функції  $f(\alpha)$ , що лежать нижче від точки мінімуму (22). Щоб уникнути цього, алгоритм обробки мультифрактального спектра повинен будуватися так, щоб зростання параметра деформації переривалося при значеннях  $q$ , починаючи з яких з'являються пусті комірки.

#### IV. МУЛЬТИФРАКТАЛЬНИЙ СПЕКТР ФАЗОВОГО ПРОСТОРУ

Об'єктом нашого дослідження є фазовий простір, основна характеристика якого подає об'єм  $\gamma = \Gamma / (2\pi\hbar)^{6N}$ , віднесений до значення, що припадає на один стан (тут  $\hbar$  — стала Планка–Дірака, фазовий об'єм  $\Gamma = \prod_{i=1}^N \int d^3q_i \int d^3p_i$  визначається інтегруванням за координатами  $\mathbf{q}_i$  й імпульсами  $\mathbf{p}_i$  всіх частинок  $i = 1, \dots, N$ ). У простих системах, для яких фазовий простір є гладким, безрозмірний об'єм  $\gamma$  зводиться до статистичної ваги  $W$ , яка визначає кількість станів системи  $W = \gamma$ . З іншого боку, фазовий простір складних систем є фрактальним об'єктом, вимірність якого  $D < 6N$  менша від значення, притаманного простим тривимірним системам, що складаються з  $N$  частинок. Завдяки цьому статистична вага самоподібної складної системи визначається степеневим залежністю  $W = \gamma^d$  з показником  $0 \leq d \leq 1$ , який задає питома значення фрактальної вимірності  $d \equiv D/6N$ . Порівняння цієї залежності зі скейлінговим співвідношенням (4) показує, що мультифрактальне задання фазового простору досягається, якщо ймовірність  $P_i$  зводиться до оберненої статистичної ваги  $1/W$ , довжина елементарного відрізка  $l_i$  — до оберненого об'єму  $1/\gamma$ , а показник Гольдера  $\alpha$  — до відносної вимірності  $d$ .

Згідно зі схемою, викладеною в розділі II, для переходу до мультифрактального фазового простору слід замінити степеневу функцію  $W = \gamma^d$ , притаманну монофракталові, питомою статистичною вагою  $W_q = \gamma^{qd}$ , деформованим показником  $q$  і помножити його на кількість монофракталів  $\mathcal{N}_d = \gamma^{-f(d)}$  з вимірністю  $d$ , які містяться в мультифракталі зі спектром  $f(d)$ . У результаті повна статистична вага, яка відіграє роль міри мультифрактала, набуває степеневого вигляду  $W_q \simeq \gamma^{\tau(q)}$  форми (9) з масовим показником  $\tau(q) = qd_q - f(d_q)$ , для якого питома вимірність  $d_q$  визначається рівністю типу (11). У межах методу множників віддалене середнє масового показника визначається рівнянням  $\overline{\tau(q)} = \ln \overline{W_q} / \ln \gamma$  форми (13). Тоді використання середньої вимірності  $\overline{d_q} = d\tau/dq$  приводить до спектра самоподібного мультифрактала

$$f(d_q) = q\overline{d_q} - \overline{\tau(q)}. \quad (23)$$

Як показав аналіз [7], масовий показник  $\tau(q)$  фазового простору складних систем подає монотонно зростаючу функцію, яка змінюється в інтервалі  $[0, 1]$  при варіації показника мультифрактала в області  $[1, \infty)$ . Найпрстіший приклад такої функції дає гіперболічний тангенс  $\tau = \text{th}(q - 1)$ , деформовання якого приводить до аналітичної моделі довільного мультифрактального простору [7]. Можливі типи залежності  $\tau(q)$  в інтервалі  $q \in [1, 2]$  обмежені зверху лінійною функцією  $\tau = q - 1$ , яка при  $q > 2$  переходить у константу  $\tau = 1$  (ця залежність відповідає гладкому фазовому простору).

Що стосується спектральної функції  $f(d)$ , то вона монотонно зростає від мінімальної величини  $f = -1$  при  $d = 0$  до максимальної  $f = 1$  при  $d = 1$ ; при цьому її похідна дорівнює  $f'(0) = \infty$  на лівій границі, і  $f'(1) = 1$  — на правій. Повний набір спектральних функцій обмежений знизу залежністю  $f = 2d - 1$ , а зверху — прямою  $f = d$ . Характерно, що спектральна функція приймає від'ємні значення в межі  $d \rightarrow 0$ , яка відповідає розрідженим монофракталам, що прямують до набору точок фазового простору. Очевидно, кількість таких точок дорівнює об'єму  $\gamma$ , що й дає означення  $\mathcal{N}_d := \gamma^{-f(d)}$  при  $f = -1$ . З іншого боку, на протилежній границі  $d = 1$ , де  $f = 1$ , отримуємо кількість монофракталів  $\mathcal{N}_1 = \gamma^{-1}$  з об'ємом  $\gamma$ , яку, як і слід очікувати, дає один мультифрактал того ж об'єму  $\gamma$ .

Використання методу множників, викладеного в попередньому розділі, дає змогу провести моделювання й обробку спектра мультифрактального фазового простору, що має дані властивості. Оскільки мінімальне значення спектральної функції має значення  $f_{\min} = -1$ , то рівняння (22) задовольняється тільки за умови  $m = 4$ , що відповідає вибору двох пар ймовірностей  $p_1, p_2 = 1 - p_1$  і  $p_3, p_4 = 1 - p_3$ . Прийmemo в останній  $p_3 = 0.3$ , а в першій ймовірність  $p_1$  пробігає значення 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05. Тоді відповідні криві на рис. 4 показують, що зменшення ймовірності  $p_1$  поліпшує збіг з аналітичними даними при малих значеннях вимірності  $d$ , тоді як в околі точки  $d = 1$  точність погіршується. Така поведінка найпростіше виражається степеневим заданням ймовірності, що варіюється  $p_1 = 10^{-k}$ ,  $k > 0$ . Тоді мінімальна вимірність  $d_{\min} = -\ln(1 - p_1) / \ln 2 \simeq 1.443 \cdot 10^{-k}$  експоненціально спадає зі зростанням показника  $k$ , а вимірність  $d_0 = -[\ln p_1 + \ln(1 - p_1)] / 2 \ln 2 \simeq 1.661 k$ , що відповідає максимуму спектральної залежності  $f(d)$ , при цьому лінійно зростає. Поведінка масового показника  $\tau(q)$  на рис. 4 показує, що найважливішою є форма спектра поблизу точки  $d = 0$ , завдяки чому слід прийняти степінь  $k \gg 1$ .

Раніше розглядалися випадкові множини, генеровані біноміальним каскадом, кожную бифуркацію якого зіставляли з різними наборами ймовірностей. Скористаємося тепер більш фізичною процедурою, у межах якої точки фрактальної множини відповідають положенню частинки, дифундуєної згідно з дискретним стохастичним рівнянням [12]

$$x_{i+1} = \sqrt{\tau}\zeta_i + [(1 - \gamma\tau) + \sqrt{\tau}\xi_i] x_i. \quad (24)$$

Тут час  $t_i = i\tau$  фіксується набором чисел  $i = 0, 1, \dots, N$  і мінімальним інтервалом  $\tau$ ;  $\zeta_i$  й  $\xi_i$  — адитивне  $q$  мультиплікативне стохастичні джерела, нормовані умовами білого шуму  $\langle \zeta_i \zeta_j \rangle = \langle \xi_i \xi_j \rangle = \delta_{ij}$ ; коефіцієнт тертя  $\gamma$  визначає параметр  $\nu = \gamma/(1 + \gamma)$ , значення якого задають режим дифузії: при  $\nu < 0$  реалізуються польоти Леві, а границя  $\nu \rightarrow 1, \gamma \rightarrow \infty$  відповідає броунівському рухові. Використання ітераційної процедури (24) приводить до мультифрактальної множини, спектральна функція якої показана на рис. 5. Із нього видно, що зі зменшенням параметра  $\nu$  нормальна дифузія переходить у польоти Леві, завдяки чому спектр мультифрактала розширюється у бік малих вимірностей  $d$ . Очевидно, це зумовлено появою розріджених областей фрактальної множини, де значення  $d = 0$  відповідають екстремальним викидам положень частинки, що відповідають польотам Леві.

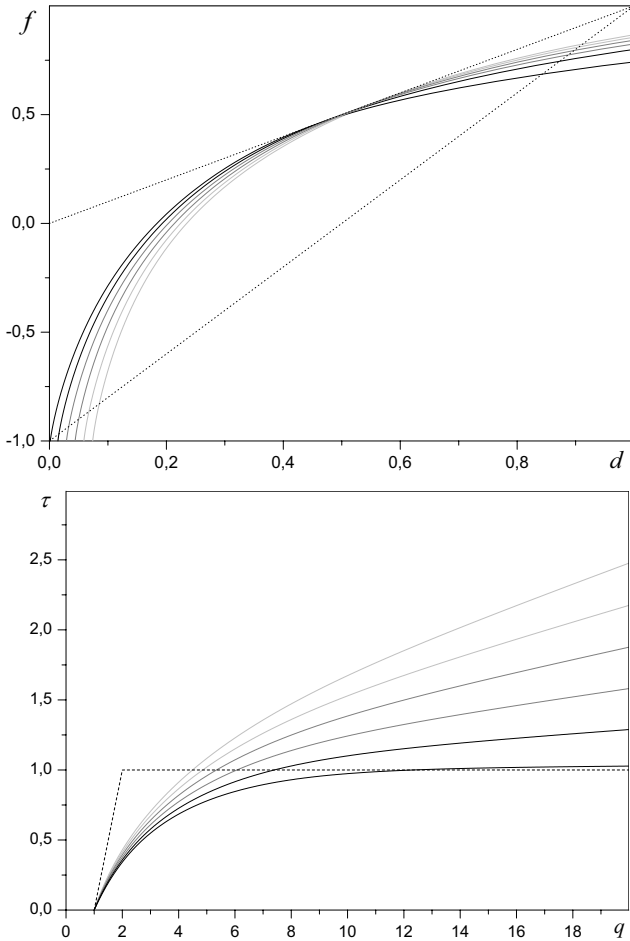


Рис. 4. Спектральна функція й масовий показник мультифрактальної множини, генерованої бінарним каскадом із  $n = 9$  рівнів із двома парами ймовірностей  $p_1, p_2 = 1 - p_1$  і  $p_3, p_4 = 1 - p_3$  (для останньої прийнято  $p_3 = 0.3$ , а в першій ймовірності  $p_1 = 0.001, 0.01, 0.02, 0.03, 0.04, 0.05$  відповідають кривим, які йдуть зліва направо в нижньому куті залежності  $f(d)$ ). Пунктирні лінії показують межі зміни залежностей  $f(d)$  і  $\tau(q)$  для фазового простору термостатичних ансамблів [7].

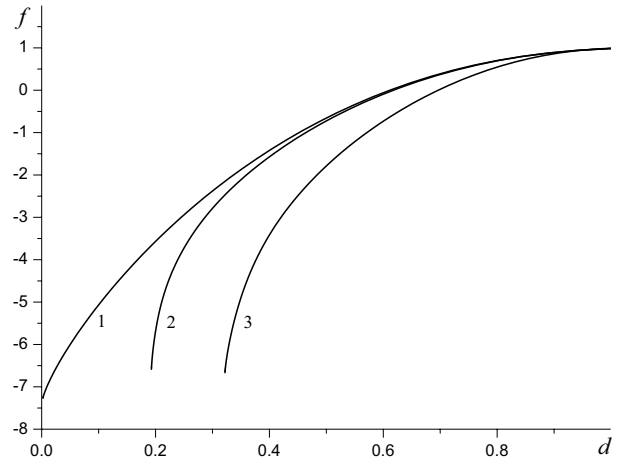


Рис. 5. Спектральна функція мультифрактальної множини, генерованої дискретним процесом (24) при  $N = 10^6, n = 10$  й  $\nu = -0.5, 0.0, 0.5$  (криві 1–3, відповідно).

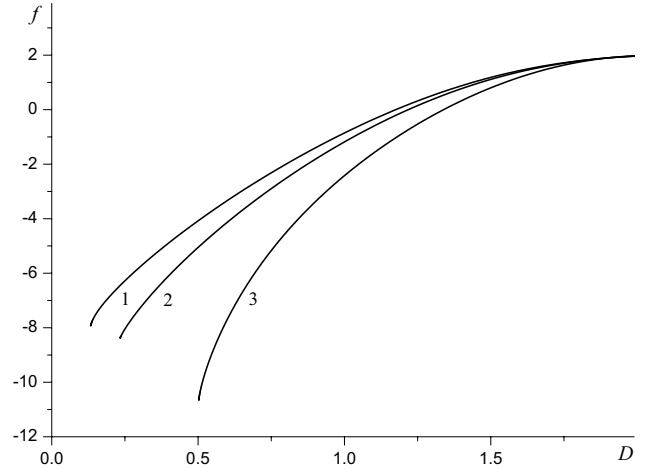


Рис. 6. Мультифрактальний спектр фазового простору, народженого дискретним процесом (24) при  $N = 10^6, n = 9$  й  $\nu = -0.5, 0.0, 0.5$  (криві 1–3, відповідно).

Розгляньмо нарешті двовимірний фазовий простір, що породжений дискретним стохастичним рівнянням (24). На відміну від одновимірного випадку тепер слід ураховувати не тільки положення  $x_i$ , але й імпульси  $p_i = (x_i - x_{i-1})/\tau$ . У межах методу множників це означає, що на рівні  $n - 1$  двовимірна множина покривається  $2^{2(n-1)}$  квадратики зі стороною  $2^{-(n-1)}$ , після чого всі квадратики діляться на  $2^2$  рівні частинки й кожній із них приписується множник типу (16). Отриманий набір  $\{M_j\}$ , що складається з  $2^{2n}$  таких множників, визначає середній масовий показник

$$\overline{\tau(q)} := \frac{1}{\ln(1/2)} \ln \left( 2^{-D_0(n-1)} \sum_{i=1}^{2^{D_0 n}} M_j^q \right), \quad (25)$$

який відрізняється від (17) появою в показниках, які відображають подрібнення фазового простору, множника, рівного топологічній вимірності  $D_0=2$ . Із рис. 6,

на якому показана спектральна функція, визначена відповідно до наведеної процедури, впливає, що, як і раніше, перехід від броунівського руху до польотів Леві розширює спектр мультифрактала. Єдина відмінність від одновимірного випадку полягає в подвоєнні інтервалів зміни фрактальної вимірності  $D$  і спектральної функції  $f$ .

## V. ОБГОВОРЕННЯ

Як зазначалось у Вступі, основні труднощі в описуванні складних систем полягають у тому, що вони не є статистичними об'єктами, які самоусереднюються, завдяки чому визначення їхніх макроскопічних характеристик потребує усереднення не тільки за статистичним ансамблем, який реалізується в цьому зразку, але й за набором різноманітних зразків. Крім того, мультифрактальний спектр фазового простору складних систем набуває від'ємних значень, які не можна визначити стандартним методом покриттів.

Дослідження мультифрактальних множин у розділах IV, V показує, що обидві вказані проблеми переборюються в межах методу множників, набір яких зводиться до багатократних повторень щодо малої кількості ймовірностей, які визначають картину фазового простору (кількість таких ймовірностей  $m$  оцінюється мінімальним значенням (22) спектральної функції). Цікаво відзначити, що метод множників був запропонований у межах каскадного задання турбулентності [13] задовго до його застосування до теорії мультифракталів [9].

Серед інших методів заслуговує згадки процедура прямого визначення мультифрактальних спектрів [14], у межах якої не потрібно знаходити спочатку масового показника, а потім — із перетворення Лежандра (23) — спектральної функції. Цей метод оснований на використанні *ескортної ймовірності* [15]

$$\mathcal{P}_j := \frac{P_j^q}{\sum_j P_j^q}, \quad (26)$$

де затравочний розподіл  $P_j$  визначає рівні енергії  $\varepsilon_j := -\ln P_j$ . У результаті ймовірність (26) набирає вигляду розподілу Гіббса

$$\mathcal{P}_j = Z_q^{-1} \exp(-q\varepsilon_j), \quad Z_q := \sum_j \exp(-q\varepsilon_j), \quad (27)$$

використання якого дає внутрішню енергію  $\alpha := \langle \varepsilon \rangle = -\langle \ln P \rangle$  й ентропію  $f := -\langle \ln \mathcal{P} \rangle$ . Вони пов'язані перетворенням Лежандра (10), яке приводить до вільної енергії  $\tau$  за умови, що параметр деформації  $q$  відіграє роль оберненої температури. Вказана термодинамічна аналогія дає змогу визначити показник Гьольдера і спектральну функцію мультифрактальної множини стандартними рівняннями

$$\alpha(q) := \frac{\sum_j \mathcal{P}_j^l \ln \mathcal{P}_j^l}{\ln l}, \quad f(q) := \frac{\sum_j \mathcal{P}_j^l \ln \mathcal{P}_j^l}{\ln l}, \quad (28)$$

у яких ймовірності  $P_j^l := N_j^l / \sum_j N_j^l$  пропорційні до кількості точок  $N_j^l$ , що потрапили в комірку  $j = 1, 2, \dots, 1/l$  після поділу одиничного відрізка на комірки довжиною  $l \ll 1$ . Тестування означень (28) на бінарному каскаді, що приводить до спектра, показаного на рис. 1, виявляє повну відповідність з аналітичними даними розділу III. Щобільше, рівності (28) дозволяють відтворити спадну гілку спектральної функції  $f(\alpha)$ , яка відповідає від'ємним значенням параметра деформації  $q$ . Однак, подібно до методу покриттів, визначення (28) не дають від'ємних значень спектральної функції випадкового мультифрактала, що відповідає рис. 2. Очевидно, це зумовлено тим, що вираз (28) передбачає усереднення логарифмічних функцій, що означає використання заморожених середніх, які можуть приводити тільки до додатних величин.

Наведені переваги використання прямого методу визначення спектральної функції вказують на доцільність пошуку означень типу (28) у межах методу множників, що є основою дослідження мультифрактальних спектрів складних систем. З метою такого пошуку переозначимо ескортну ймовірність (26)

$$\mathcal{P}_j := \frac{M_j^q}{\sum_{j=1}^{BN} M_j^q} \quad (29)$$

через набір множників

$$M_i^k := \frac{N_i^k}{N_i}, \quad k = 1, 2, \dots, B \quad (30)$$

узагальнювальними (16). Тут припускаємо, що досліджувана множина спочатку ділиться на  $N \gg 1$  частин  $i = 1, 2, \dots, N$ , кожна з яких містить  $N_i \gg 1$  точок; після цього отримані фрагменти діляться на  $B \geq 2$  комірок, у які потрапляють по  $N_i^k \gg 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, B$  точок; отримані в результаті  $BN$  комірок нумеруємо індексом  $j = 1, 2, \dots, BN$  так, щоб забезпечити перебір усіх можливих значень  $i = 1, 2, \dots, N$  и  $k = 1, 2, \dots, B$ , що подають вихідні фрагменти та їхні складники. У тому випадку, коли досліджувана множина заповнює простір одиничного об'єму, який має топологічну вимірність  $D_0$ , зручно поділити його спочатку на  $D_0$ -мірні кубики з ребром  $L \ll 1$ , а потім кожний з них поділити на комірки тієї ж вимірності з кратною стороною  $l = L/b$ ,  $b = 2, 3, \dots$ . У цьому випадку  $N = (1/L)^{D_0}$ ,  $B = b^{D_0}$ .

Відтак отриманий набір множників (30) зіставляємо із середніми величинами

$$\langle \langle f(M) \rangle \rangle := \sum_{j=1}^{BN} \mathcal{P}_j f(M_j); \quad (31)$$

$$\overline{\overline{f(M)}} := \sum_{j=1}^{BN} \pi_j f(M_j), \quad \pi_j := \frac{1}{N}.$$

Перша подає заморожене значення, що визначається статистичним усередненням з ймовірністю (29), друга



— відпалене середнє, одержане перебором  $BN$  значень множників, кожному з яких відповідає незмінна ймовірність  $\pi_j = 1/N$ , що в  $B$  раз перевищує частоту їх появи. Рівняння, які дозволяють прямо визначати спектральну функцію складних систем, впливають із виразів (20) і результату підстановки рівнянь (20) і (17) в перетворення Лежандра (21):

$$\alpha(q) = \frac{\langle \ln M \rangle}{\ln(1/2)}, \quad (32)$$

$$f(q) = \frac{\langle \ln M^q \rangle - \ln \overline{M^q}}{\ln(1/2)}.$$

Подібно до значення (28) ефективна внутрішня енергія  $\alpha$  зводиться до замороженого середнього, тоді як ефективна ентропія  $f$  складної системи визначається різницею замороженого середнього значення логарифма деформованого множника  $M^q$  і логарифма відпаленого середнього  $\overline{M^q}$ .

Використання запропонованого методу дає змогу відтворити найпростіше й найточніше чином мультифрактальні спектри, зображені на рисунках 1–6. У зв'язку з цим можна сподіватися, що методика, основана на використанні рівнянь (29)–(32), є універсальним засобом дослідження фрактальних об'єктів різної природи.

- 
- [1] P. W. Anderson, *Phys. Today* **44**, July (1991).  
 [2] G. Parisi, *Physica A* **263**, 557 (1999).  
 [3] R. Lopez-Ruiz, H. L. Mancini, X. Calbet, *Phys. Lett. A* **209**, 321 (1995).  
 [4] M. Gell-Mann, C. Tsallis, *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications* (Oxford University Press, Oxford, 2004).  
 [5] А. И. Олемской, *Коллективное поведение сложных систем* (Эдиториал УРСС, Москва, 2008).  
 [6] Е. Федер, *Фракталы* (Мир, Москва, 1991).  
 [7] A. I. Olemskoi, V. O. Kharchenko, V. N. Borisyuk, *Physica A* **387**, 1895 (2008).  
 [8] A. I. Olemskoi, *Fractals in Condensed Matter Physics*, in *Physics Reviews*, v. 18. Part 1, pp. 1–173, ed. I. M. Khalatnikov, (Gordon and Breach, London, 1996).  
 [9] A. B. Chhabra, K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. A* **43**, 1114 (1991).  
 [10] T. C. Halsey, M. H. Jensen, L. P. Kadanoff, I. Procaccia, B. I. Shraiman, *Phys. Rev. A*, **33**, 1141 (1986).  
 [11] В. С. Доценко, *Усп. физ. наук* **163**, No 6, 1 (1993).  
 [12] S. Anteneodo, *Physica A*, **358**, 289 (2005).  
 [13] Е. А. Новиков, *Прикл. мат. мех. РАН* **35**, 266 (1971).  
 [14] A. B. Chhabra, C. Meneveau, R. V. Jensen, K. R. Sreenivasan, *Phys. Rev. A* **40**, 5284 (1989).  
 [15] C. Beck, F. Schlögl, *Thermodynamics of chaotic systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).

## MODELING THE PHASE SPACE OF COMPLEX SYSTEMS

A. I. Olemskoi<sup>1,2</sup>, V. M. Borisyuk<sup>2</sup>, I. A. Shuda<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Applied Physics NAS of Ukraine, 40030, Sumy, Ukraine*

<sup>2</sup>*Sumy State University, 40007, Sumy, Ukraine*

On the basis of the Cantor multifractal set, being described analytically, we test both box-counting and multiplier methods, the former of which uses quenched average, whereas the latter does the annealed one. We elaborate the numerical algorithm of both modeling and studying multifractal phase space to take into account that a complex system is not self-averaged and its spectral function can take negative values. A multifractal set generated by the anomalous diffusion process is considered as a physical example.